

ESERCIZIO 1

E = Almeno 1 persona ha il nostro compleanno

n = Numero di persone

$$P(E) = 1 - P(E^c) = 1 - \frac{D_{364,n}^*}{D_{365,n}^*} = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n$$

Quando $P(E) > \frac{1}{2}$?

$$\left(\frac{364}{365}\right)^n < 0.5 \Rightarrow \dots \Rightarrow n > \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(\frac{364}{365})}$$

ESERCIZIO 2

13 Numeri divisi in 8 e 5 **manca testo corretto**

A 7

B 5

C 1

1. **manca obj**

$$P(A \cap B) = 1 - P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - [P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - \underbrace{P(\bar{A} \cap \bar{B})}_{=0}]$$

$$P(\bar{A}) = \frac{\binom{7}{7}}{\binom{13}{7}} \quad P(\bar{B}) = \frac{\binom{8}{5}}{\binom{13}{5}}$$

2. Calcolare la probabilità che A e B siano avvelenati e C sta bene

$$P(A \cap B \cap C) = 1 - \left[\frac{\binom{7}{7}}{\binom{12}{7}} + \frac{\binom{7}{5}}{\binom{12}{5}} \right]$$

3. Calcolare che tutti e 3 si siano intossicati $P(A \cap B \cap C)$

Facile calcolare intersezione quando gli eventi sono indipendenti.

Ma è più facile in questo caso calcolare la condizionale $P(E \cap C) = P(E)P(C)$.

$$P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B)P(C) = \left(1 - \left[\frac{\binom{7}{7}}{\binom{12}{7}} + \frac{\binom{7}{5}}{\binom{12}{5}} \right]\right) \frac{5}{13}$$

ESERCIZIO 3

Lancio una moneta, se esce testa prende il treno, croce a casa.

In stazione 6 treni diversi. Lancia dado per scegliere.

Visto che non era su nessuno dei 5 treni, qual era la probabilità che fosse sul sesto?

$$P() = \frac{1}{2}$$

$$1, 6 \quad P() = \frac{1}{12}$$

$$P(\overline{6_1} \cap \dots \cap \overline{6_7}) = P(\overline{6_6} \cup) = \frac{P(6_6 \cap 6_6 \cup)}{P(6_6 \cup)} = \frac{P(6_6)}{P(6_6) + P() - \underbrace{P(6_6 \cap)}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{7}$$

= 0A casa sul treno imposs.

ESERCIZIO 4

Abbiamo una roulette equilibrata con solo i numeri da 1 a 12.

1,3,5,6,10,12 sono ossi

2,4,7,8,11 sono ossi

A = Numero pari B = Numero rosso C = 3 D = 6 E = 8

1. A, B sono indipendenti?

, indipendenti $P(E \cap) = P(E)P()$ $P(E) = P(E)$ (non condiziona su)

$P(A) = \frac{1}{2}$ $P(B) = \frac{1}{2}$ $P(A \cap B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \Rightarrow$, indipendenti

2. A, B, D sono indipendenti 2 a 2? (A e D sono indip? B e D sono indip?)

$$P(D) = \frac{1}{2}$$

$P(A \cap D) = \frac{1}{4}$ (non scritto: Num. di casi favor. / poss. è uguale alla molt. delle prob. di A e D)

$P(B \cap D) = \frac{1}{3}$ (Non sono indip. perché non rispecchiano cond. sopra)

3. test

$$P(E) = \frac{2}{3} \quad P(A \cap E) = \underbrace{\frac{4}{12}}_{\substack{\text{Casi av.} \\ \text{Casi poss.}}} = \frac{1}{3} = \underbrace{\frac{2}{3}}_{P(A)} \underbrace{\frac{1}{2}}_{P(E)}$$

$$P(E \cap B \cap E) = P(A)P(B)P(E)$$

$$P(A \cap B \cap E) = \frac{1}{12} \quad (\text{Numero 6}) \quad \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow A, B, \text{ non indip.}$$

ESERCIZIO 5

Sappiamo che le consegne possono essere in città o fuori città .

Può poi essere urgente o non urgente.

Sappiamo che

$$P(\text{fuori città}) = P() = 0.4$$

$$P(\text{urgente}) = P() = 0.3$$

$$P(\text{n città e non urgente}) = P(\neg \cap \neg) = 0.4 = 1 - P(\cup)$$

1. $P(\cap)$

$$P(\cap) = P() + P() - P(\cup) = 0.4 + 0.3 - 0.6 = 0.1$$

$P()P()$ $P(\cap)$, non sono indipendenti

Notiamo anche che $P() < P()$

2. $P(\cap \neg)$

$$P(\cap \neg) = P() - P(\cap) = 0.2$$

ESERCIZIO 6

Sanno entrambi che il giocatore più forte nel tennis club è Carlo.

Un papà dà la macchina al figlio Andrea a una condizione:

devi giocare 3 partite, alternativamente con me e Carlo.

Se ne vince 2 di fila può avere la macchina.

1. Qual è la comb. di match migliore per massimizzare la vincita?

Ipotesi:

$$P(\text{Andrea vince contro padre}) = p_1$$

$$P(\text{Andrea vince contro Carlo}) = p_2$$

$$p_2 < p_1$$

p_1, p_2 indipendenti

$$p_{1,2,3} = \text{Andrea vince la macchina}$$

$$= (p_1 \cap p_2 \cap p_3) \cup (p_1 \cap p_2 \cap \neg p_3) \cup (p_1 \cap \neg p_2 \cap p_3)$$

Gli eventi sono indep. quindi

$$P() = P(p_1 \cap p_2 \cap p_3) + P(p_1 \cap p_2 \cap \neg p_3) + P(p_1 \cap \neg p_2 \cap p_3)$$

- Caso P-C-P $p_{121} + p_{12}(1 - p_1) + (1 - p_1)p_{21} = p_{12}(2 - p_1)$
- Caso C-P-C $p_{212} + p_{21}(1 - p_2) + (1 - p_2)p_{12} = p_{12}(2 - p_2)$

Giocare P-C-P è sicuramente più favorevole.

ESERCIZIO 7

Abbiamo una moneta equilibrata e la lanciamo 3 volte.

A = testa al primo lancio B = 1 e 2 lancio hanno risultati diversi

= Almeno 2 teste

$$= , c, c, c, cc, cc, cc, ccc = 8$$

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} \text{ (fav / poss, } A, B \text{ indipendenti)}$$

$$P(A) = \frac{3}{4}$$

$$P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(P \cap B) = \frac{1}{4} \text{ (Diverso da prod. dei due)}$$

L'indipendenza non si conserva obbligatoriamente all'aggiungere di condizioni!

E = Almeno 1 testa tra il 1 e il 2 lancio E = Almeno 1 testa tra il 2 e il 3 lancio

= 1 2 lancio è croce

$$P(E) = \frac{3}{4} \quad P() = \frac{3}{4}$$

$$P(E \cap) = \frac{5}{8} \neq \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \Rightarrow , \text{ non indipendenti}$$

$$P(E) = \frac{1}{2} \quad P() = \frac{1}{2}$$

$$P(E \cap) = \frac{1}{4} = P(E)P()$$

Gli eventi E , non erano indipendenti ma lo possono diventare all'aggiungere di condizioni!

ESERCIZIO 8

= assa corrente

1. Supponiamo di avere 2 interruttori in serie.

$$P() = P({}_1\text{chiuso} \cap {}_2\text{chiuso}) = {}_{12}$$

2. Supponiamo di avere 2 interruttori in parallelo.

$$P() = P({}_1\text{chiuso} \cup {}_2\text{chiuso}) = {}_1 + {}_2 - {}_{12} = 1 - (1 - {}_1)(1 - {}_2)$$

3. Supponiamo di avere 3 interruttori, di cui ${}_1$ e ${}_2$ in serie ${}_{12}$, entrambi in parallelo con ${}_3$.

$$P({}_1) = 0.8 \quad P({}_2) = 0. \quad P({}_3) = 0.7$$

$$P({}_{12}) = P({}_1)P({}_2) = 0.8 \cdot 0. = 0.72$$

$$P() = P({}_{12}) + P({}_3) - P({}_{12} \cap {}_3) = P({}_{12}) + P({}_3) - P({}_{12})P({}_3) \\ = 0.72 + 0.77 - 0.72 \cdot 0.7 = 0.86 = 1 - 0.104$$

4. Qual è la probabilità che l'interruttore ${}_1$ sia aperto ma non passa corrente?

$$\text{Bayes: } P({}_1 -) = \frac{P({}_1)P({}_-)}{P({}_-)} = \frac{0.30 \cdot 2}{0.104} = \frac{0.06}{0.104}$$

COMPITO 1

Supponiamo di avere 4 interruttori con stessa probabilità $=$, in serie a 2 a 2 e in parallelo.

1. $P()$

2. C'è un interruttore ${}_5$ tra il nodo in mezzo tra ${}_1$ e ${}_2$ e il nodo in mezzo tra ${}_3$ e ${}_4$

COMPITO 2

Pavimento a piastrelle quadrate di lato 20cm.

Un piattino da caffè con raggio 5cm cade sul pavimento.

E_n = 1 piattino cade toccando n piastrelle

$$P(E_1) = \frac{1010}{2020} = \frac{100}{400} = \frac{1}{4} \quad P(E_2) = \frac{5104}{400} = \frac{200}{400} = \frac{1}{2} \quad P(E_4) = \frac{55}{400} = \frac{100}{400} = \frac{1}{4} \\ P(E_3) = \frac{4-}{16}$$

= n di piastrelle

$$= \underbrace{1}_{\frac{1}{4}} \quad \underbrace{2}_{\frac{1}{2}} \quad \underbrace{3}_{\frac{4-}{16}} \quad \underbrace{4}_{\frac{1}{16}}$$

$$F(x) = P(X \leq x) = 0 \quad x < 1 \frac{1}{4} \quad 1 \frac{1}{4} \leq x < 2 \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \quad 2 \frac{1}{4} \leq x < 3 \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{4}{16} = 1 - \frac{1}{16} \quad 3 \frac{1}{4} \leq x < 4 \quad 4 \leq x$$

(Grafico: a scalini per i vari intervalli indicati)

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{4}{16} + 4 \cdot \frac{1}{16} = 2 + \frac{1}{4}$$